

Министерство сельского хозяйства российской федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
Высшего профессионального образования (ФГБОУ ВПО)
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

***Курсовые работы
по математической логике
и теории алгоритмов***

*для студентов факультета
«Прикладная информатика»*

Краснодар
2014

Примерные темы курсовых работ

1. Понятие высказывания. Логические операции над высказываниями. Формулы алгебры логики. Равносильные преобразования формул.
2. Исчисление высказываний. Понятие формулы исчисления высказываний. Понятие вывода.
3. Понятие предиката. Логические операции над предикатами. Кванторные операции. Понятие формулы логики предикатов.
4. Формализованное исчисление предикатов.
5. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов. Алгоритмы распознавания общезначимости формул логики предикатов.
6. Проблемы непротиворечивости, полноты, разрешимости теории.
7. Основные формализации понятия алгоритма.
8. Неразрешимые алгоритмические проблемы (обзор).
9. Нормальные алгоритмы Маркова.
10. Понятие суперпозиции функций, схема примитивной рекурсии, операция минимизации.
11. Теория натуральных чисел. Теорема Гёделя о неполноте.
12. Разрешимые и перечислимые множества. Основные теоремы.
13. Математическая логика и программное обеспечение компьютеров.
14. Дедуктивный характер математики. Предмет математической логики.
15. Высказывания и операции над ними.
16. Формулы алгебры высказываний. Классификация формул.
17. Тавтологии (законы) логики высказываний. Основные тавтологии логики высказываний.
18. Тавтологии (законы) логики высказываний. Правило заключения.
19. Тавтологии (законы) логики высказываний. Правило подстановки.
20. Логическое следование. Признак логического следствия.
21. Логическая равносильность. Признак равносильности. Основные равносильности алгебры высказываний.
22. Элементарные дизъюнкции. Теорема о тождественной истинности элементарной дизъюнкции.
23. Элементарные конъюнкции. Теорема о тождественной ложности элементарной конъюнкции.
24. Конъюнктивная нормальная форма. Теорема о тождественной истинности формул алгебры высказываний.
25. Дизъюнктивная нормальная форма. Теорема о тождественной ложности формул алгебры высказываний.
26. Совершенные конъюнктивные и совершенные дизъюнктивные нормальные формы.
27. Формальные и неформальные аксиоматические теории. Построение

формальных аксиоматических теорий.

28. Построение аксиоматической теории высказываний.
29. Теорема о дедукции и следствия из нее.
30. Применение теоремы о дедукции. Производные правила вывода.
31. Лемма о выводимости.
32. Полнота формализованного исчисления высказываний.
33. Непротиворечивость формализованного исчисления высказываний
34. Разрешимость формализованного исчисления высказываний.
35. Независимость системы аксиом формализованного исчисления высказываний.
36. Понятие предиката. Классификация предикатов. Множество истинности предиката.
37. Равносильность и следование предикатов.
38. Логические операции над предикатами.
39. Кванторные операции над предикатами.
40. Формулы логики предикатов. Классификация формул логики предикатов.
41. Равносильные формулы логики предикатов.
42. Проблема разрешения для общезначимости и выполнимости формул логики предикатов.
43. Формализованное исчисление предикатов.
44. Интуитивное представление об алгоритмах. Необходимость уточнения понятия алгоритма.
45. Машины Тьюринга.
46. Нормальные алгоритмы Маркова.
47. Рекурсивные функции.

Тема 1. Элементы теории множеств

Множества можно задавать двумя способами:

1. перечислением элементов множества.

Например, множество $M = \{x, y, z\}$ состоит из трёх элементов, порядок перечисления которых не имеет значения, т.е. $\{x, y, z\} = \{y, x, z\} = \dots$

2. описанием элементов множества:

- *описанием характеристических свойств*, объединяющих элементы в виде уравнений, диаграмм Эйлера-Венна и геометрически. Например, множество $M = \{x^2 \in \mathbb{N}; x - \text{простое число}\}$ задано квадратами простых чисел.

- *описанием множеств, порожденных процедурами над элементами*, означает указание алгоритма порождения элементов этого множества.

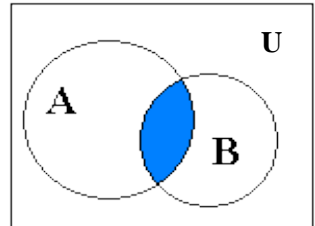
Например, подмножество M всех нечетных натуральных чисел с помощью порождающей процедуры имеет вид: $M = \{x \in \mathbb{N}: x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$

Операции над множествами

Рассмотрим операции над множествами в порядке убывания приоритета.

Пересечением (произведением) двух множеств называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

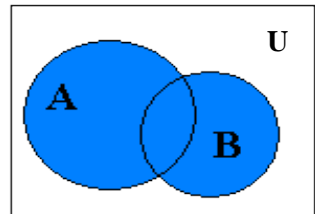
Обозначение: $C = A \cap B$



Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или тому и другому вместе).

Обозначение:

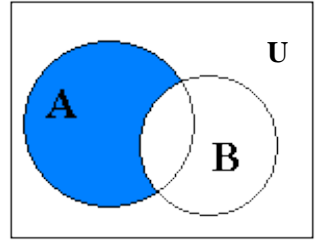
$C = A \cup B$



Разностью множеств A и B называется такое множество C , которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

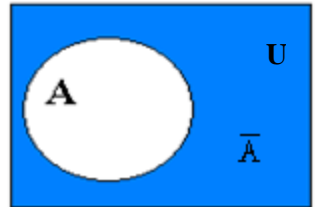
Обозначение: $C = A \setminus B$ или

$$C = A \setminus B$$



Дополнением множества A до универсального множества U называется множество C , равное разности $U \setminus A$.

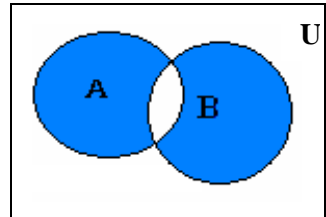
Обозначение: $C = U \setminus A$ или $C = \bar{A}$



Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cup B \setminus A \cap B.$$

Обозначение: $C = A \Delta B$



Формула включений и исключений

для двух множеств A и B :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

для трех множеств A , B и C :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

где $n(Z)$ – количество элементов множества Z , т.е. его *мощность*.

Примеры выполнения заданий

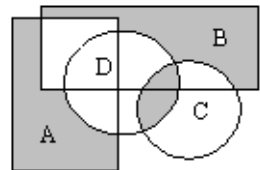
1. Заданы множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множеств: $D = A \setminus B$ и $E = A \cap B$.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $E = \{1, 3, 5\}$.

2. Представьте заштрихованные области формулами теории множеств

Решение: $D = (A \Delta B) \setminus (D \cap C)$



Задание 1.

Пусть (x, y) - координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множества $A \cap B$ и $A \cup B$:

0) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 2y| < 2\}$

2) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\};$

$B = \{(x, y) \mid |4y + x| > 2\};$

4) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\};$

$B = \{(x, y) \mid |3x + y| < 3\};$

6) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 36\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + y| \geq 2\};$

8) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\};$

$B = \{(x, y) \mid |x - 3y| > 3\};$

1) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\};$

$B = \{(x, y) \mid |4x - y| \leq 3\};$

3) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 16\};$

$B = \{(x, y) \mid |2x + 2y| > 4\};$

5) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 3| \geq 2\};$

7) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\};$

$B = \{(x, y) \mid |2x - y| \leq 1\};$

9) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\};$

$B = \{(x, y) \mid |x + 4y| < 6\};$

Задание 2.

Вычислите, используя диаграммы Эйлера-Венна и формулу включений и исключений:

0)1) В группе спортсменов, прибывших на соревнования по плаванию, 16 человек из Австрии, 18 человек из России, 12 женщин из Канады. Четверть спортсменов из Австрии - женщины, половина россиян – мужчины, а три женщины и пять мужчин из Китая. Сколько спортсменов мужчин и женщин в этой группе?

2)3) Среди 100 деталей прошли обработку на 1-м станке 42 штуки, на 2-м - 30 штук, а на 3-м - 28. Причем на 1-ом и 2-ом станках обработано 5 деталей, на 1-ом и 3-ем - 10 деталей, на 2-ом и 3-ем - 8 деталей, на всех трех станках обработано 3 детали. Сколько деталей

обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

4)5) В группе туристов, посетивших нашу страну, 30 женщин. 33 человека из Европы, 16 человек из Польши, 12 человек из Канады. Четверть группы из Польши – женщины. Треть женщин группы – из Канады. Сколько туристов в этой группе, если каждый попал, хотя бы в одну из упомянутых групп?

6)7) В отчете об обследовании студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский языки, таково: все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский - 10, французский и английский - 8, немецкий и французский - 20, английский язык - 30 человек, французский - 50, немецкий - 23. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

8)9) Из 25 учеников класса «отлично» по математике в четверти получили 12 человек, «отлично» по физике – 10 человек, 6 учеников получили «отлично» по обоим предметам. Сколько учеников не имеют отличной оценки ни по математике, ни по физике?

Равносильные преобразования множеств

Законы теории множеств

$A \cup B \equiv B \cup A;$	$A \cup \emptyset \equiv A;$
$A \cap B \equiv B \cap A;$	$A \cap \emptyset \equiv \emptyset;$
$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap C;$	$A \cap \overline{A} \equiv \emptyset;$
$A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C);$	$A \cup A \equiv A;$
$A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C);$	$A \cap A \equiv A;$
$A \cup U \equiv U;$	$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B};$
$A \cap U \equiv A;$	$\overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B};$
$A \cup \overline{A} \equiv U;$	$A \cup (A \cap B) \equiv A;$
	$A \cap (A \cup B) \equiv A$

Равносильности теории множеств

$A B \equiv A \cap \overline{B};$	$A (B C) \equiv (A B) \cup (A \cap C);$
$A A \equiv \emptyset;$	$(A B) C \equiv A B \cup C;$

$$\begin{aligned}
 A \mid (B \cup C) &\equiv (A \mid B) \cap (A \mid C); & A \Delta B &\equiv B \Delta A; \\
 A \mid (B \cap C) &\equiv (A \mid B) \cup (A \mid C); & A \Delta B &\equiv A \cup B \mid A \cap B; \\
 (A \cap B) \mid C &\equiv (A \mid C) \cap (B \mid C); & A \Delta B &\equiv (A \mid B) \cup (B \mid A); \\
 (A \cup B) \mid C &\equiv (A \mid C) \cup (B \mid C); & A \Delta (B \Delta C) &\equiv (A \Delta B) \Delta C; \\
 A \mid (A \mid B) &\equiv A \cap B; & A \cap (B \Delta C) &\equiv (A \cap B) \Delta (A \cap C).
 \end{aligned}$$

Примеры выполнения заданий

1. Докажите теоретико-числовое равенство: $\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup \overline{Z} = Z$
 $\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup \overline{Z} = (Y \cup X \cup \overline{X} \cup \overline{Y}) \cap Z = U \cap Z = Z$

2. Упростите выражение: $X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X})$.

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) = X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap ((X \cup \overline{X}) \mid (X \cap \overline{X}))$$

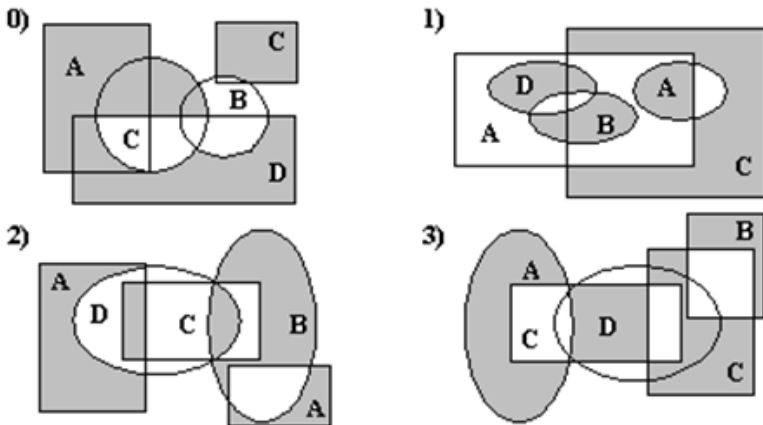
$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) = X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (U \mid \emptyset)$$

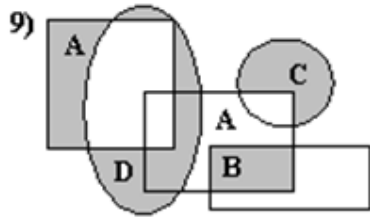
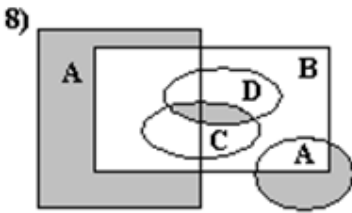
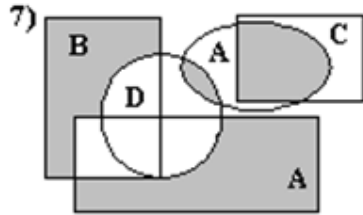
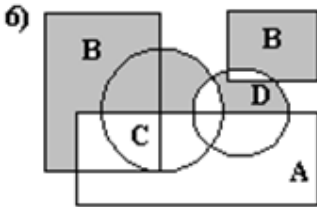
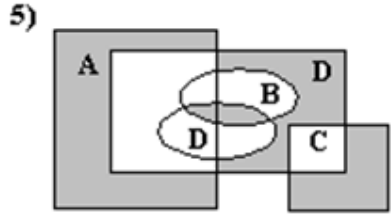
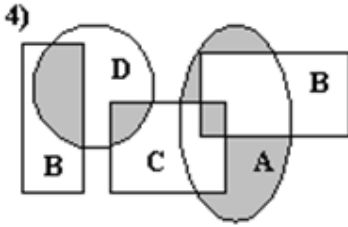
$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) = X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap U = (X \cup \overline{X}) \cap (X \cup Y)$$

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) = U \cap (X \cup Y) = X \cup Y$$

Задание 3.

Представьте заштрихованные области формулами теории множеств, упрощая их, если возможно.





Задание 4.

Упростите выражения:

$$\begin{aligned}
 0) \quad & X \cup Y \cup (X \cup Y) \cap Z \equiv \\
 & \overline{Y} \cap \overline{Z} \mid (\overline{Y} \cap \overline{Z} \mid Y) \equiv \\
 & (X \Delta Y) \cap \overline{Y} \equiv \\
 & (\overline{x} \Delta Z) \cap (X \cap Y) \equiv \\
 & \overline{Z} \mid (\overline{Z} \mid \overline{x}) \cap X \equiv \\
 & (X \cup Y) \Delta (X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z}) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \overline{x} \cap \overline{y} \cup \overline{x} \cap \overline{y} \cup X \equiv \\
 & \overline{x} \cap (Y \mid X \cup Y) \equiv \\
 & \overline{x} \cap (Y \Delta X) \equiv \\
 & (\overline{x} \cap \overline{y}) \Delta X \equiv \\
 & (\overline{x} \cap \overline{z} \Delta \overline{x}) \mid \overline{x} \cup \overline{z} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \overline{x} \cap \overline{y} \cup \overline{x} \cup \overline{y} \cup \overline{y} \equiv \\
 & (X \cup Y \mid Z) \mid (X \cap Z) \equiv \\
 & (X \cup Y) \cap (X \Delta \overline{x}) \equiv \\
 & (X \cap \overline{y}) \Delta \overline{y} \equiv \\
 & \overline{x} \Delta \overline{x} \cap \overline{z} \equiv \\
 & Y \cup \overline{x} \cap \overline{x} \cap \overline{y} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \equiv \\
 & ((X \cup Z) \mid X) \cup Y \cap \overline{x} \equiv \\
 & X \Delta (X \cap Y) \equiv \\
 & (\overline{x} \Delta Z) \cup (X \cap Y) \equiv \\
 & X \mid (\overline{x} \cap (X \cup \overline{y})) \equiv
 \end{aligned}$$

- $$(X \cup Y) | (X \cap (Z | Y)) \equiv$$
- 4) $X \cap Y \cup (\overline{X} \cap \overline{Y} \cup \overline{X}) \equiv$
 $X \cup Y | (X \cup Y | \overline{X}) \equiv$
 $Y \cap (X \Delta Y) \equiv$
 $(\overline{X} \cup \overline{Y}) \Delta \overline{X} \equiv$
 $\overline{Y} \cap (X \Delta Y) \equiv$
 $\overline{X} | (\overline{Y} | \overline{X} \cup \overline{Y}) \equiv$
- 6) $(X \cap Y) \cap (X \cup Z) \equiv$
 $(X \cap Y \cup Z) | X \equiv$
 $(\overline{X} \cap \overline{Y}) \Delta (\overline{X} | Y) \equiv$
 $(\overline{X} \Delta \overline{Y}) \cup \overline{X} \equiv$
 $\overline{X} \cup Y | (X \cup Y \cap \overline{X}) \equiv$
 $\overline{X} \Delta \overline{X} \cap \overline{Z} \equiv \overline{Z} | \overline{X} \equiv$
- 8) $X \cup Y \cup Z \cup \overline{X} \cap \overline{Y} \equiv$
 $((X \cup Y) | X) \cap (Z | Y) \equiv$
 $Y \Delta (\overline{X} \cup \overline{Y}) \equiv$
 $(X \Delta Z) | (Y \cap X) \equiv$
 $(\overline{Z} \cap \overline{X} \cap Y) | (X \cup Y) \equiv$
 $(X \cup Y) | (Z \cup Y) \equiv$
- $$(\overline{Y} \Delta X) | \overline{X} \equiv$$
- 5) $\overline{Z} \cup Z \cup \overline{Z} \equiv$
 $Z | ((X \cup Y) \cup Z) \equiv$
 $\overline{X} \cap (\overline{X} \Delta \overline{Y}) \equiv$
 $(\overline{X} \cap Z) \cup (X \Delta Y) \equiv$
 $(X | Z) \cup (X \cap Z) \equiv$
 $(X \cup Y) \cup (X \Delta Y) \equiv$
- 7) $\overline{X} \cap \overline{Y} \cup X \cup Z \cup \overline{Y} \equiv$
 $X | (Y \cap (X \cup \overline{Y})) \equiv$
 $(Y \Delta X) | \overline{X} \equiv$
 $(\overline{X} \cap \overline{Y}) \Delta (X \cup Y) \equiv$
 $(\overline{X} \Delta \overline{X} \cap \overline{Z}) \cap (\overline{Z} | \overline{X}) \equiv$
 $\overline{X} \cap (Y | X) \cup Y \equiv$
- 9) $\overline{Z} \cup \overline{Y} \cup (X \cup Z \cap Y) \equiv$
 $X | (Y | \overline{X} \cup \overline{Y}) \equiv$
 $(X \cup Y \cup Z) \Delta (X \cap Y) \equiv$
 $\overline{Y} \cap \overline{Z} \Delta (\overline{Y} \cap \overline{Z} | Y) \equiv$
 $\overline{Y} \cap \overline{Z} | (Z | Y) \equiv$
 $X \cap Y \Delta \overline{Y} \cup X \equiv$

Тема 2. Логика высказываний

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением *высказываний*, представляющих собой повествовательное предложение, относительно которого объективно можно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Из одних высказываний могут составляться другие, более сложные высказывания, называемые *составными*. *Простые* высказывания обозначаются буквами латинского алфавита: А, В, С, ... и являются *логическими переменными* со значениями истина, либо ложь. Значения истинности высказывания обозначается буквой **И** (истина) или 1, а ложность обозначается **Л** (ложь) или 0. **И** или **Л** называются *логическими константами*. Составные высказывания могут строиться из простых с помощью *логических связей*, которым соответствуют *логические операции* (см. табл.2).

Логические операции задаются таблично:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \& B$	$A \rightarrow B$	$A \oplus B$	$A \sim B$	$A B$	$A \downarrow B$
0	0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0	0

Из логических переменных и констант, соединенных логическими операциями и скобками строятся *логические формулы*.

При вычислении значения формулы учитывают *приоритет* выполнения логических операций. Операции в таблице 2 перечислены по убыванию приоритета.

Таблица 2. Соответствие логических связей логическим операциям

Логическая связка	Название логических операций	Обозначения операций
<i>не</i>	Отрицание, инверсия	\neg
<i>и, а, но, хотя</i>	Конъюнкция, логическое умножение	$\&, \cdot, \wedge$
<i>или</i>	Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение	$\vee, +$
<i>либо</i>	Разделительная (строгая) дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2	\oplus, Δ
<i>если..., то</i>	Импликация, следование	\rightarrow, \Rightarrow
<i>тогда и только тогда, когда необходимо и достаточно</i>	Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность	$\sim, \Leftrightarrow, \equiv, \leftrightarrow$
<i>не (... и ...)</i>	Отрицание конъюнкции, Штрих Шеффера	$ $
<i>не (... или ...)</i>	Отрицание дизъюнкции, стрелка Пирса, функция Вебба, функция Даггера	\downarrow, \circ

Равносильные преобразования формул алгебры логики

Любую формулу алгебры логики можно преобразовать к равносильной ей, в которой используются только аксиоматически введенные операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.

Преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.). Логические операции обладают рядом свойств и подчинены логическим законам (см. табл.3).

Операции строгой дизъюнкции, импликации, эквиваленции, штрих Шеффера и стрелка Пирса могут быть равносильно выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, поэтому они считаются как бы избыточными.

Логические равносильности алгебры логики:

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &\equiv \bar{a} \vee b; \\ a \oplus b &\equiv \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b}; \\ a \sim b &\equiv a \& b \vee \bar{a} \& \bar{b}. \\ a \mid b &\equiv \neg (a \& b) \\ a \downarrow b &\equiv \neg (a \vee b) \end{aligned}$$

Равносильное упрощение формул выполняется по шагам:

1. замена операций импликации, строгой дизъюнкции, эквиваленции, функции Шеффера и стрелки Пирса логическими равносильностями;
2. применение законов алгебры логики.

Таблица 3. Свойства и законы алгебры логики

Название	Содержание
Коммутативность (переместительный)	$a \vee b \equiv b \vee a$ $a \& b \equiv b \& a$
	$a \oplus b \equiv b \oplus a$
Ассоциативность (сочетательный)	$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$
	$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$

	$a \oplus (b \oplus c) \equiv (a \oplus b) \oplus c$
Дистрибутивность (распределительный)	$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$
	$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$
Закон снятия двойного отрицания	$\overline{\overline{a}} \equiv a$
Законы де Моргана	$\overline{a \& b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$
	$\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \& \overline{b}$
	следствие закона $a \vee b \equiv \overline{\overline{a} \& \overline{b}}; a \& b \equiv \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$
Законы поглощения	$a \vee a \& b \equiv a \quad a \& (a \vee b) \equiv a$
Свойства константы Л	$a \vee \mathbf{Л} \equiv a \quad a \& \mathbf{Л} \equiv \mathbf{Л}$
Свойства константы И	$a \vee \mathbf{И} \equiv \mathbf{И} \quad a \& \mathbf{И} \equiv a$
Закон исключения третьего	$\overline{\overline{a} \vee a} \equiv \mathbf{И}$
Законы идемпотентности	$a \vee a \equiv a \quad a \& a \equiv a$
Закон противоречия	$\overline{a} \& a \equiv \mathbf{Л}$
Законы склеивания	$(a \& b) \vee (\overline{a} \& b) \equiv b$
	$(a \vee b) \& (\overline{a} \vee b) \equiv b$

Примеры выполнения заданий

1. Докажите равносильность $x \& \overline{y} \vee \overline{x \vee y} \equiv \overline{y}$;

- 1) $x \& \overline{y} \vee \overline{x \vee y} \equiv x \& \overline{y} \vee \overline{x} \& \overline{y}$ (по закону де Моргана);
- 2) $x \& \overline{y} \vee \overline{x} \& \overline{y} \equiv \overline{y} \& (x \vee \overline{x})$ (по дистрибутивному закону);
- 3) $\overline{y} \& (x \vee \overline{x}) \equiv \overline{y} \& \mathbf{И}$ (по закону исключения третьего);
- 4) $\overline{y} \& \mathbf{И} \equiv \overline{y}$ (по свойству логической константы И).

2. Упростите: $x \& (y \rightarrow x) \rightarrow \overline{y} \equiv$

- 1) $x \& (y \rightarrow x) \rightarrow \overline{y} \equiv x \& (\overline{y} \vee x) \rightarrow \overline{y}$ (по равносильности);
- 2) $x \& (\overline{y} \vee x) \rightarrow \overline{y} \equiv x \& (\overline{y} \vee x) \vee \overline{y}$ (по равносильности);
- 3) $\overline{x \& (\overline{y} \vee x) \vee \overline{y}} \equiv \overline{x} \vee (\overline{y} \& \overline{x}) \vee \overline{y}$ (по закону де Моргана);

- 4) $\bar{x} \vee (\bar{y} \& \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \& \bar{x}) \vee \bar{y}$ (по закону снятия дв. отрицания);
 5) $\bar{x} \vee (\bar{y} \& \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ (по закону поглощения).

3. Определите тождественную истинность или ложность формулы

$$X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y \equiv$$

- 1) $X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y \equiv \overline{X \& Y \& \bar{x}} \vee Y$ (по равносильности)
 2) $\overline{X \& Y \& \bar{x}} \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee \bar{x} \vee Y$ (по закону де Моргана)
 3) $\bar{X} \vee \bar{y} \vee \bar{x} \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y$ (по закону снятия дв. отрицания);
 4) $\bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y \equiv \bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y$ (по коммутативному закону);
 5) $\bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y \equiv I \vee I \equiv I$ (по закону исключения третьего).

Задание 1.

Докажите равносильности, используя законы логики:

- 0) a) $\bar{x} \rightarrow \bar{y} \oplus \bar{x} \equiv X \vee Y$; b) $\overline{\bar{X} \vee Y \vee \bar{X} \vee \bar{Y}} \equiv x \sim y$;
 1) a) $X \rightarrow (Y \rightarrow Z) \equiv X \& Y \rightarrow Z$; b) $X \rightarrow Y \oplus \bar{x} \equiv \bar{x} \vee Y$;
 2) a) $X \sim Y \& \bar{x} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y}$; b) $X \oplus Y \& \bar{x} \equiv X \vee Y$;
 3) a) $X \& (X \rightarrow Y) \equiv X \& Y$; b) $X \oplus Y \rightarrow \bar{x} \vee Y \equiv \bar{x} \vee Y$;
 4) a) $X \rightarrow Y \vee \bar{x} \& \bar{y} \equiv \bar{x} \vee Y$; b) $(X \oplus \bar{Y}) \vee \bar{x} \& \bar{Y} \equiv \bar{x} \& \bar{Y}$;
 5) a) $\bar{Y} \& (\bar{x} \vee Y) \rightarrow Y \equiv X \vee Y$; b) $X \rightarrow Y \vee \bar{x} \oplus Y \vee X \& Y \equiv \bar{x}$;
 6) a) $\bar{X} \rightarrow \bar{Y} \vee \bar{x} \& \bar{Y} \& \bar{x} \rightarrow Y \equiv Y$; b) $\bar{x} \oplus Y \rightarrow X \equiv X \vee Y$;
 7) a) $(\bar{X} \vee \bar{Y} \rightarrow X \vee Y) \& Y \equiv Y$; b) $\bar{x} \oplus \bar{Y} \& \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \equiv \bar{x} \vee \bar{Y}$;
 8) a) $\bar{x} \rightarrow \bar{Y} \oplus X \sim Y \equiv X \& Y$; b) $\bar{X} \oplus \bar{Y} \vee \bar{x} \& \bar{Y} \equiv X \sim Y$;
 9) a) $X \oplus \bar{x} \rightarrow \bar{Y} \equiv \bar{Y}$; b) $\bar{x} \rightarrow Y \sim X \equiv X \vee \bar{Y}$;

Логической функцией называют функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аргументы которой x_1, x_2, \dots, x_n и сама функция принимают значения 0 или 1. Для $n = 0$ – (нульарные функции) существует 2 различные логические функции, значения: константы И и Л;

$n = 1$ (унарные функции) существует 4 различных логических функций, значения:

$$g_1(x)=I; g_2(x)=\neg x, g_3(x)=x, g_4(x)=I,$$

Существуют три вида представления логических функций: аналитический (формула), табличный и в виде функциональной схемы и две канонические формы представления: нормальная и совершенная. Классы совершенных форм: совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).

Механизм построения СДНФ:

1. постройте таблицу истинности логической функции;
2. отметьте наборы переменных, на которых логическая функция истинна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией конъюнкции, а между наборами – дизъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется с отрицанием, а если истинное значение, то без отрицания;
4. упростите полученную формулу.

Механизм построения СКНФ:

1. постройте таблицу истинности логической функции;
2. отметьте наборы переменных, на которых логическая функция ложна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией дизъюнкции, а между наборами – конъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется без отрицания, а если истинное значение, то с отрицанием;
4. упростите полученную формулу.

Примеры выполнения заданий

1. Постройте канонические формы для функции $\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$.

a	b	$\bar{a} \& b$	$\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$
-----	-----	----------------	-------------------------------

0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0

$$\begin{aligned} \text{СДНФ} &= \bar{a} \& \bar{b} \vee \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& (\bar{b} \vee b) \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& 1 \vee a \& \bar{b} \equiv \\ &\equiv \bar{a} \vee a \& \bar{b} \equiv (\bar{a} \vee a) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv 1 \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv \bar{a} \vee \bar{b}. \end{aligned}$$

$$\text{СКНФ} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

Задание 2.

Постройте СДНФ, СКНФ для функций:

- | | |
|--|--|
| 0) $\bar{a} \rightarrow \bar{b} \oplus \bar{c};$ | 5) $(\overline{b \& c \vee a}) \oplus \bar{c};$ |
| 1) $(\bar{a} \vee \bar{b}) \oplus (b \vee a);$ | 6) $\bar{b} \& a \oplus \bar{a} \vee \bar{b};$ |
| 2) $(a \vee \bar{b}) \rightarrow \bar{c};$ | 7) $\bar{a} \vee b \& \bar{b} \rightarrow c;$ |
| 3) $a \& b \oplus \bar{a} \vee \bar{b};$ | 8) $(\bar{a} \vee \bar{b}) \rightarrow \bar{c};$ |
| 4) $(a \rightarrow b) \& (a \rightarrow c);$ | 9) $(\bar{a} \rightarrow b) \& c \vee a;$ |

Задание 3.

Булевская функция $f(x, y, z)$ задана таблично. Представьте эту же функцию формулой логики и функциональной схемой:

Переменные			Варианты задания функции $f(x, y, z)$									
x	y	z	0)	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1

Применение булевых функций для анализа и синтеза дискретных устройств. Упрощение и преобразование комбинационных схем

Преобразование информации в блоках ПК производится логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

Логический элемент **И** (*конъюнктор*) реализует операцию логического умножения (см. рис. 1). Логический элемент **ИЛИ** (*дизъюнктор*) реализует операцию логического сложения (см. рис. 2). Логический элемент **НЕ** (*инвертор*) реализует операцию отрицания (см. рис. 3). Логический элемент **И-НЕ** реализует функцию штрих Шеффера (см. рис. 4). Логический элемент **ИЛИ-НЕ** реализует функцию стрелка Пирса (см. рис. 5).

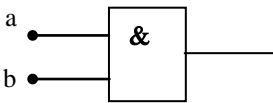


Рис.1 Конъюнктор

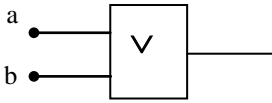


Рис.2 Дизъюнктор

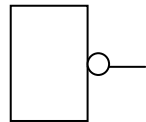


Рис.3 Инвертор

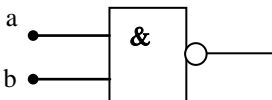


Рис.4 И- НЕ

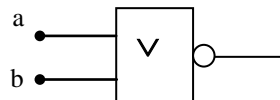
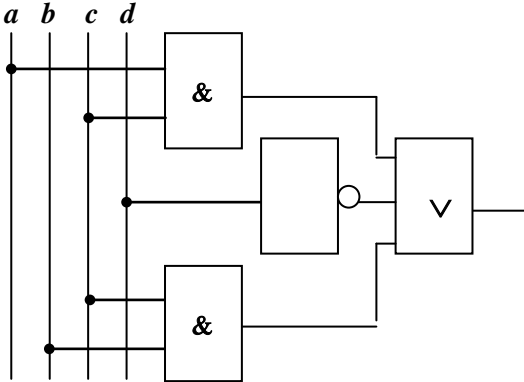


Рис.5 ИЛИ - НЕ

Примеры выполнения заданий

1. Укажите функцию $F(a, b, c, d)$, реализуемую схемой из функциональных элементов предварительно упростив:



Решение: $F(a, b, c, d) = a \& c \vee \bar{d} \vee c \& b \equiv c \& (a \vee b) \vee \bar{d}$.

Задание 8.

Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, с 5-ю переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замкнуты ровно 4 переключателя.

Задание 9.

Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, чтобы в спортзале можно было включать и выключать свет при помощи любого из 3-х выключателей.

Тема 3. Элементы логики предикатов

Предикатом *арности n* (*n*-арным, или *n*-местным предикатом) называют функцию от *n* переменных $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную на декартовом произведении множеств: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и принимающую значения из множества $\{И, Л\}$.

Примеры выполнения заданий

1. Постройте матрицу одноместного предиката $P(x)$, если:

$P(x) = "x \text{ кратно } 2"$, где $x \in [1, 14]$

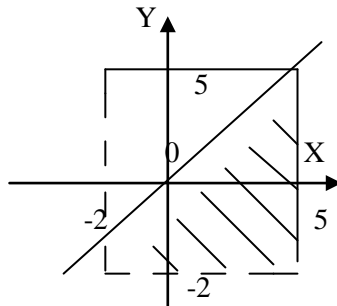
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(x)$	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л

2. Изобразите геометрически множество истинности двухместного предиката $P(x, y) = 1/4x \geq 1/4y$, если $x, y \in (-2, 5]$;

Построим график прямой:

$$1/4y = 1/4x; \quad y = x;$$

x	y
0	0
1	1



Проверим точку выше графика прямой, например, с координатами $(-1; 2)$.

Подставим координаты в неравенство:

$1/4(-1) \geq 1/4(2)$ – это ложно, поэтому

область истинности предиката расположена ниже прямой, включая ее точки (т.к. нестрогое неравенство).

Задание 1.

Изобразите геометрически множество истинности двухместного предиката $A(x, y)$.

0) $A(x, y) = "1/2x > 7y"$, если $x, y \in (-2, 13]$;	1) $A(x, y) = "4x > -1/3y"$, если $x, y \in (-5, 11]$;
2) $A(x, y) = "-1/3x \leq 3y"$, если $x, y \in [-4, 9]$;	3) $A(x, y) = "8x \leq 1/4y"$, если $x, y \in (-10, 5]$;
4) $A(x, y) = "6x > 1/4y"$, если $x, y \in [-12, 3]$;	5) $A(x, y) = "-1/8x \leq 3y"$, если $x, y \in (-1, 15]$;
6) $A(x, y) = "2x \leq 5/2y"$, если $x, y \in [-9, 4]$;	7) $A(x, y) = "-4 < 3y"$, если $x, y \in [-10, 5]$;
8) $A(x, y) = "1/6x > -12y"$, если $x, y \in [-1, 14]$;	9) $A(x, y) = "-4x \leq 2/3y"$, если $x, y \in [-8, 6]$;

Задание 1.

Изобразите геометрически множество истинности двухместного предиката $Q(x, y)$.

0) $Q(x, y) = "1/2x^2 < 3y"$, если $x, y \in (-1, 6)$;

1) $Q(x, y) = "-3x^2 < 4y"$, если $x, y \in (-4, 8]$;

2) $Q(x, y) = "-2x^2 \leq 4y"$, если $x, y \in [-2, 7]$;

3) $Q(x, y) = "-6x^2 \leq 5y"$, если $x, y \in [-3, 7]$;

4) $Q(x, y) = "2x^2 < -5y"$, если $x, y \in (-2, 6)$;

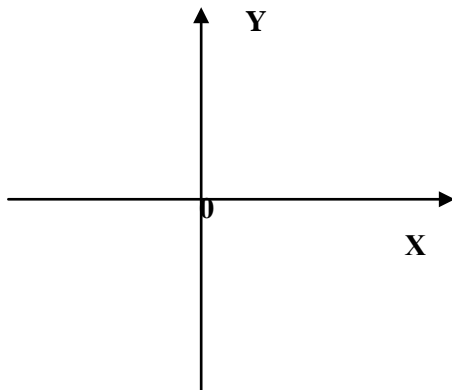
5) $Q(x, y) = "-3x^2 \geq 2y"$, если $x, y \in (-4, 5]$;

6) $Q(x, y) = "4x^2 \leq -5y"$, если $x, y \in [-4, 5]$;

7) $Q(x, y) = "-3x > 1/5y"$, если $x, y \in (-7, 1)$;

8) $Q(x, y) = "2x^2 > -4y"$, если $x, y \in [-3, 4]$;

9) $Q(x, y) = "5x^2 \leq 1/3y"$, если $x, y \in [-3, 8]$;



Все логические операции логики высказываний справедливы и для предикатов (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция). *Квантор* — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. В математической логике приписывание квантора к формуле называется *связыванием*, а переменную, к которой он относится, называют *связанной* иначе *свободной*. Например, в предикате $\forall x A(x, y) \vee \forall z B(c, z)$ переменные x и z — связанные, а переменные y и c — свободные.

Чаще всего используют два вида кванторов:

Название	Прочтение	Обозначение
Квантор общности	«все», «всякий», «каждый», «любой»	\forall
Квантор существования	«существует», «найдется», «хотя бы один»	\exists

Пусть задан одноместный предикат $P(x)$ на множестве $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, тогда: $\forall x P(x) = P(a_1) \& P(a_2) \& P(a_3) \& P(a_4)$;

$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4)$.

Квантор уменьшает число свободных переменных в логическом выражении и превращает трёхместный предикат в двухмест-

ный, двухместный — в одноместный, одноместный — в высказывание.

Равносильность формул логики предикатов

Две формулы логики предикатов А и В называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $U(x,y)$ – переменные предикаты. Тогда имеют место равносильности:

Таблица. Основные равносильности.

$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$
$\neg (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \& \forall y \neg Q(y)$
$\neg (\forall x P(x) \& \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \forall y \neg Q(y)$
$\neg \neg \forall x P(x) \equiv \forall x P(x)$
$\neg \neg \exists x P(x) \equiv \exists x P(x)$
$\forall x \forall y U(x, y) \equiv \forall y \forall x U(x, y)$
$\exists x \exists y U(x, y) \equiv \exists y \exists x U(x, y)$
$\forall x \exists y U(x, y) \neq \exists y \forall x U(x, y)$
$\exists x \forall y U(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x U(x, y)$
$\forall x \forall x Q(x) \equiv \forall x Q(x)$
$\exists x \exists x Q(x) \equiv \exists x Q(x)$
$\forall x (P(x) \& P(x)) \equiv \forall x P(x)$
$\exists x (P(x) \vee P(x)) \equiv \exists x P(x)$
$\forall x P(x) \& \forall y U(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \& U(y))$
$\forall x P(x) \& \forall x U(x) \equiv \forall x (P(x) \& U(x))$
$\exists x P(x) \vee \exists y U(y) \equiv \exists x \exists y (P(x) \vee U(y))$
$\exists x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \exists x (P(x) \vee U(x))$
$\exists x P(x) \& \exists x U(x) \neq \exists x (P(x) \& U(x))$
$\exists x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \exists x \exists a (P(x) \& U(a))$

$$\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \neq \forall x (P(x) \vee U(x))$$

$$\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \equiv \forall x \forall a (P(x) \vee U(a))$$

$$\forall x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \& U(a))$$

$$\forall x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \vee U(a))$$

В логике предикатов различают два вида форм: приведенную и предваренную.

Говорят, что формула логики предикатов имеет *приведенную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую *предваренную* (префиксную, пренексную) *нормальную форму* (ПНФ). В ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются перед всеми операциями алгебры логики.

Алгоритм получения ПНФ:

1. выразите операции импликации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2. внесите символы отрицания так, чтобы они относились непосредственно к символам предикатов (и, таким образом, мы приводим исходную формулу к приведенной форме);

3. для формул, содержащих подформулы вида: $\forall x P(x) \vee \forall x U(x)$, $\exists x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \vee \exists x U(x)$ введите новые связанные переменные;

4. используя свойства и законы логики предикатов, вынесите все кванторы перед высказыванием и получите формулу в виде ПНФ.

Примеры выполнения заданий

1. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме:

$$\begin{aligned} (\Box x P(x) \rightarrow \Box y Q(y)) \rightarrow R(z) &\equiv \overline{\Box x P(x)} \Box \Box y Q(y) \Box R(z) \equiv \\ &\equiv \overline{\overline{\Box x P(x)}} \overline{\Box y Q(y)} \Box R(z) \equiv \Box x P(x) \Box \Box y \overline{Q(y)} \Box R(z) \end{aligned}$$

2. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме, где x, y, z – вещественные переменные, применив отрицание к формуле:

$$\forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z)).$$

$$\neg (\forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z))) \equiv$$

$$\equiv \exists y \forall x ((y = x) \& \forall y (x < y) \vee \exists z (y - x \geq z))$$

3. Приведите формулу логики предикатов к предваренной нормальной форме $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y)$.

$$\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \neg Q(x, y) \equiv$$

$$\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \neg Q(x, y)) \equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall a \neg Q(x, a)) \equiv$$

$$\equiv \exists x \forall y \forall a (P(x, y) \vee \forall a \neg Q(x, a)).$$

Задание 3.

Приведите формулу логики предикатов к приведенной нормальной форме:

0)

$$\forall x \neg (\forall y A(x, y) \sim \exists y H(z, x)) ;$$

$$\neg \forall y \forall z U(y, z) \rightarrow \forall x \exists y Q(y, x) ;$$

1)

$$\exists t (\neg (\forall y K(y, t) \sim \exists y \exists z Q(y, t, z))) ;$$

$$\forall z \forall x A(x, z) \& \forall y \forall z Q(y, x) ;$$

2)

$$\forall z \forall y \neg (\exists x G(z, y) \rightarrow \forall x \forall s N(x, s)) ;$$

$$\neg \forall s \exists x U(s, x) \& \exists y \forall x Q(y, x) ;$$

3)

$$\exists x \neg (\exists y \forall z P(z, x, y) \& \exists z \forall y K(y, x, z)) ;$$

$$\exists x \forall y T(y, x) \rightarrow \neg \exists y \forall x P(y, x) ;$$

4)

$$\forall x (\neg (\exists y G(y, x) \sim \neg \forall y P(y, x)) ;$$

$$\forall t (\neg \exists x \forall y N(y, x) \vee \exists y L(y, t)) ;$$

5)

$$\forall z \neg (\forall y A(z, y) \vee \neg \exists x \exists y H(y, x)) ;$$

$$\exists a \exists y U(y, a) \sim \exists t \exists a Q(a, t) ;$$

6)

$$\forall x (\exists n C(n, x) \rightarrow \forall t \exists y Q(y, x, t)) ;$$

$$\forall n \forall m \neg \forall y G(n, y, m) \vee \neg \forall x \exists y B(y, x)) ;$$

7)

$$\forall x \neg (\exists y \exists t A(x, y, t) \rightarrow \forall y \exists z Q(y, z)) ;$$

$$\forall y \forall m U(y, m) \& \neg \forall x \exists y \exists m K(m, x, y) ;$$

8)

$$\forall x \neg (\forall y \exists z K(x, z, y) \rightarrow \exists y Q(y, x)) ;$$

$$\forall x \neg (\forall y \forall t U(t, y, x) \& \neg \exists y \exists t R(y, t)) ;$$

9)

$$\forall y \forall x \exists z A(y, x, z) \& \forall x \exists z B(z, x) ;$$

$$\exists x \neg (\forall y K(y, x) \rightarrow \exists y \exists z L(y, x, z)) ;$$

Задание 4.

Приведите к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:

0)

$$\forall y \exists x T(y, x) \& \forall z \forall x Q(z, x) ;$$

$$\forall y \exists x T(y, x) \supset \forall y \forall x Q(y, x) ;$$

1)

$$\forall y (\exists x \forall y G(y, x) \& \forall s \exists x N(y, x, s)) ;$$

$$\forall y \exists x \exists z H(x, y, z) \supset \exists y \exists x G(y, x) ;$$

2)

$$\forall y \exists x A(y, x) \& \exists y \forall z P(y, z) ;$$

$$\forall y \exists x U(y, x) \supset \forall x \forall y P(y, x) ;$$

3)

$$\exists x (\neg (\exists y A(x, y) \& \forall y P(y, x))) ;$$

$$\exists z \exists x T(z, x) \supset \forall y \forall x U(y, x) ;$$

4)

$$\forall x \exists y T(y, x) \& \forall y \forall x H(y, x) ;$$

$$\exists x \neg \forall y A(x, y) \supset \forall y \forall z T(y, z) ;$$

5)

$$\forall n \exists y \forall x P(n, y, x) \& \forall y \neg \exists n A(n, y) ;$$

$$\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \supset \exists y \neg \forall n A(n, y) ;$$

6)

$$\forall x (\neg \forall y U(y, x) \& \forall y Q(y, x)) ;$$

$$\exists y \neg \forall x U(y, x) \supset \forall y \exists x Q(y, x) ;$$

7)

$$\forall x \neg \exists y A(x, y) \vee \forall y \exists z T(y, z) ;$$

$$\exists x (\neg(\forall y A(x, y) \supset \exists y P(y, x))) ;$$

8)

$$\exists x \forall y A(x, y) \vee \forall y \neg \exists x R(y, x);$$

$$\neg \forall y \exists x K(y, x) \supset \exists z \forall y \forall x Q(y, x, z);$$

9)

$$\forall x \neg \exists y P(y, x) \& \exists y \forall x Q(y, x);$$

$$\exists y \neg \forall x U(y, x) \supset \forall \exists x \exists y Q(y, x);$$

Тема 4. Элементы теории алгоритмов

К основным изобразительным средствам алгоритмов можно отнести следующие способы записи:

- словесная;
- словесно-формульная;
- в графическом виде (в виде блок-схем);
- в виде текста программы на алгоритмическом языке.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите в словесной форме алгоритм вычисления значения логической функции, реализующую операцию конъюнкции:

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{true, если } x = 1, y = 1; \\ \text{false, в остальных случаях} \end{cases}$$

Решение.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.
2. Проверить, x равно 1 и y равно 1? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно true’, перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, x равно 1 и y равно 0 или x равно 0 и y равно 1 или x равно 0 и y равно 0? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно false’, перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

2. Опишите пример 1 в словесно-формульной форме.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.

2. Проверить, $x = 1$ и $y = 1$? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно true', перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, $x = 1$ и $y = 0$ или $x = 0$ и $y = 1$ или $x = 0$ и $y = 0$? Если да, то выдать сообщение: 'Значение функции равно false', перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

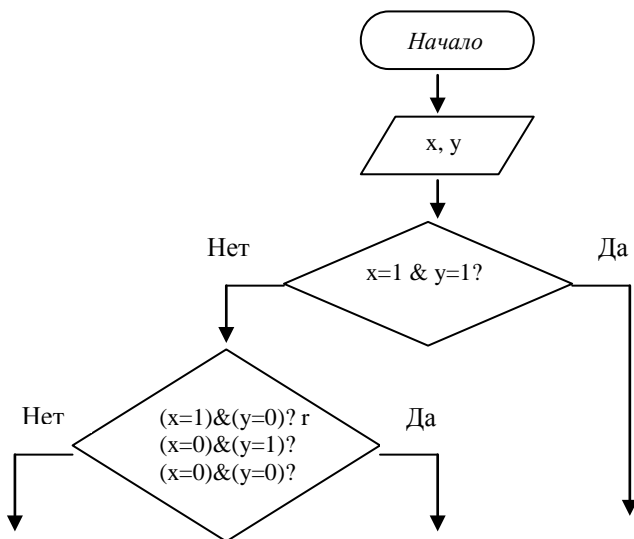
3. Опишите пример 1 в виде текста программы на алгоритмическом языке.

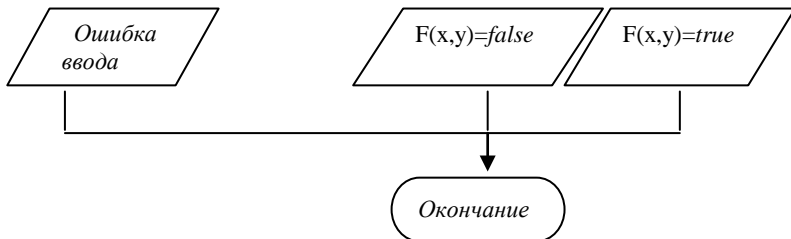
```

Program func;
var x, y: integer;
begin
    writeln ('Введите значения двух аргументов функции (0/1)');
    readln (x, y);
    if (x = 1) and (y = 1) then write ('Значение функции равно
true');
    if (x = 1) and (y = 0) or (x = 0) and (y = 1) or (x = 0) and (y = 0)
        then write ('Значение функции равно
false')
        else write ('Ошибка ввода')
end.

```

5. Опишите пример 1 в виде блок-схемы





Разветвляющиеся алгоритмы

Процесс обработки информации называется *разветвляющимся*, если в зависимости от проверки некоторого условия предусмотрен выбор по двум направлениям.

Алгоритм, описывающий разветвляющийся процесс представлен на рис. 5.3.

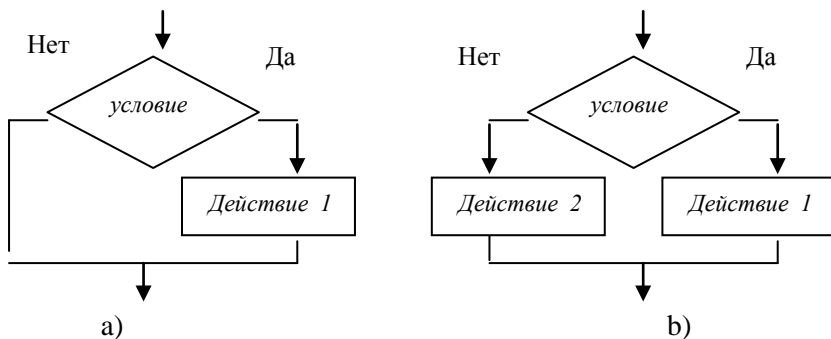


Рис. 5.3. Блок-схема разветвляющегося процесса обработки информации:

- a) краткая форма вида “Если ..., то ...”;
- b) полная форма вида “Если ..., то ..., иначе”.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите графическим способом алгоритм вычисления значе-

ния выражения:
$$Z = \frac{\sqrt{ax^3 + e^x}}{\ln(x + a)}$$

Предполагается, что выражение знаменателя дроби $(x + a)$ больше нуля.

Решение: на рис. 5.4. приведена блок-схема решения задачи.

2. Даны действительные числа x, y и z . Составьте блок-схему алгоритма вычисления: $\max(\min(x^2 + y, z^2), z^3 - e^y)$.

Решение: на рис. 5.5. приведена блок-схема решения задачи.

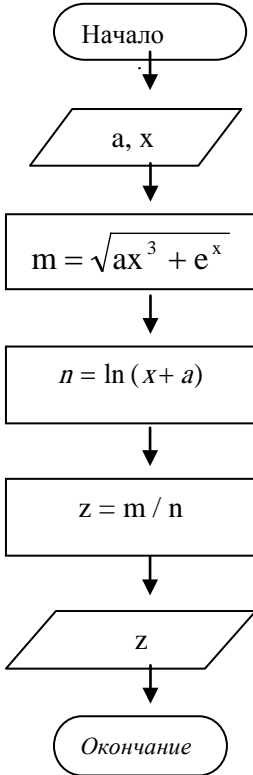


Рис. 5.4. Блок-схема решения задачи 1

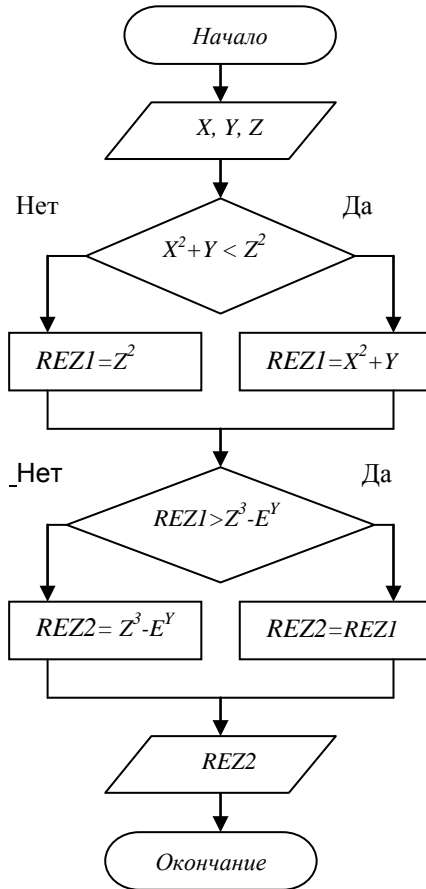


Рис. 5.5. Блок-схема решения задачи 2

Опишите алгоритмы в графической форме для следующих задач:

Задание 1.

Для заданного числа a найдите корень уравнения $f(x)=0$, где:

$$0) \quad f(x) = \begin{cases} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ a^2 x + 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad 1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 20a, & \text{если } 0 < x < \sqrt{a} \\ \sqrt{ax^5} + 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x^3}{a+5}, & \text{если } x > 0 \\ \frac{ax^4 - 1}{a}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^3}{x-1}, & \text{если } x > 1 \\ \frac{x^4 - 3}{a}, & \text{иначе} \end{cases};$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} a - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \cos^2 ax, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x^3 - 4a + 5, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8ax - 6, & \text{если } x \leq 2 \\ \frac{1}{a^2 x + 6x - 12}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 7) \quad f(x) = \begin{cases} a^3 - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < \sqrt{a} \\ x^5 - \frac{a}{25} \sqrt{xa}, & \text{иначе} \end{cases}$$

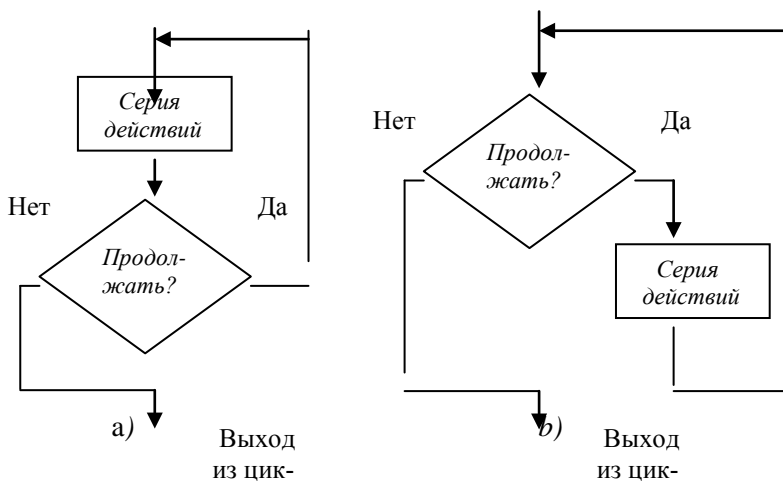
$$8) \quad f(x) = \begin{cases} a\sqrt{|x-1|}, & \text{если } x > 1 \\ 1 + \frac{x^4}{\sqrt[3]{a}}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 9) \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(ax - \frac{\pi}{6}\right), & \text{если } x > \frac{\pi}{6} \\ \sin(ax^2 + \pi), & \text{иначе} \end{cases}$$

Циклические алгоритмы

Процесс обработки информации называется **циклическим**, если существуют многократно повторяемые последовательности шагов процесса (серия действий). Эта последовательность шагов называется **циклом**.

Существуют несколько вариантов управления циклом посредством задания условий продолжения и завершения.

Графическая схема управления циклическим процессом посредством задания условия продолжения выполнения вычислительного процесса: а) цикл с проверкой постусловия; б) цикл с проверкой предусловия.

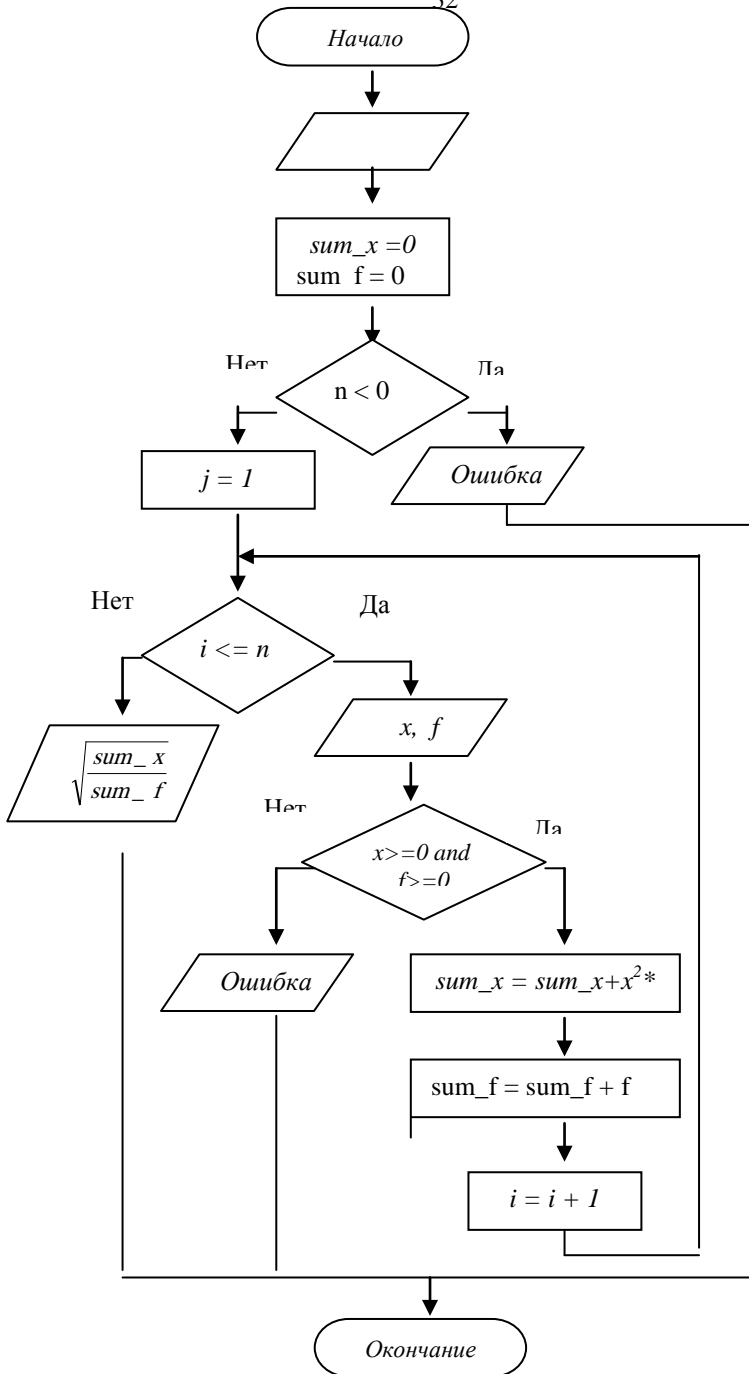


Примеры выполнения заданий

1. Составьте блок-схему алгоритма вычисления средневзвешенной по формуле:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}}$$

Решение: на рисунке приведен алгоритм решения задачи:



2. Составьте блок-схему алгоритма вычисления суммы кубов последовательности, состоящей из положительных чисел до первого введенного отрицательного числа.

Решение: на рис. 5.8. приведен алгоритм решения задачи.

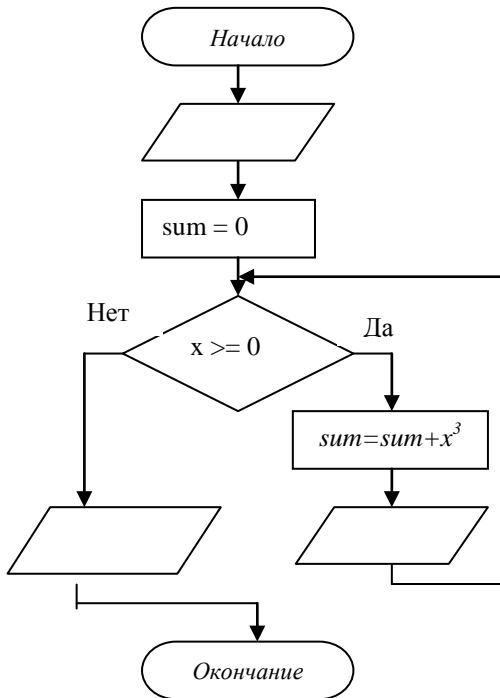


Рис. Схема решения задачи 2

Задание 2.

Вычислите сумму n -го количества слагаемых $S = \sum_n a_n(x)$ при

различных значениях параметра суммирования x , где общий член суммы имеет вид:

$$\frac{n \cdot x^3}{2n!};$$

$$(-1)^5 \cdot \frac{n^2 \cdot x^3}{(2n+1)!};$$

$$(-1)^7 \frac{\cos nx}{n^2};$$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$\frac{\cos nx}{n};$$

$$\frac{n \cdot x^3}{(n+1)!};$$

$$\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1};$$

$$\frac{\cos 2nx}{4n^2-1};$$

$$\frac{n^2+1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3;$$

$$\frac{n \cdot x^4}{4n+1};$$

Машина Тьюринга состоит из бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, и рабочей головки. Она работает в дискретные моменты времени: $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$. В каждый момент во всякой ячейке ленты может быть записана одна из букв некоторого конечного внешнего алфавита $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$, а головка может находиться в одном из конечного числа внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{r-1}\}$ - внутренний алфавит. Символ a_0 является "пустым" (будем обозначать его Λ) и что все клетки ленты заполнены этим символом.

В каждый момент времени рабочая головка обозревает одну ячейку ленты и выполняет следующие действия:

- 1) *заменяет символ в обозреваемой ячейке новым (возможно, прежним);*
- 2) *переходит в новое состояние (возможно, в прежнее);*
- 3) *сдвигается на одну ячейку (вправо **R** или влево **L**) либо остается на месте **H**.*

Работа машины задается системой команд вида: $q_i a_j \rightarrow q_l a_p D$, где $D \in \{\mathbf{R}, \mathbf{L}, \mathbf{H}\}$.

Совокупность команд будем называть программой машины Тьюринга.

Среди состояний машины (головки) выделено одно, называемое заключительным (впредь мы будем считать, что это состояние q_0).

Под конфигурацией машины Тьюринга мы понимаем распределение букв алфавита A по ячейкам ленты, состояние головки и обозреваемую ячейку. Работа машины Тьюринга по программе состоит в смене конфигураций. Конфигурацию в момент времени t_i будем обозначать Kt_i . Если эта конфигурация не является заключительной, то

машина в соответствии со следующей командой переходит в конфигурацию Kt_{i+1} .

Если нужно решить некоторую задачу на машине Тьюринга, исходным данным задачи сопоставляется начальная конфигурация Kt_0 , а ответ задачи определяется заключительной конфигурацией, в которую программа машины переводит конфигурацию Kt_0 .

Примеры выполнения заданий

1. Пусть требуется добавить 1 к натуральному числу n , представленному на ленте машины Тьюринга в двоичной системе счисления, то есть в алфавите $\{0,1\}$.

Решение: внешний алфавит машины будет следующим: $\{\Lambda, 0, 1\}$.

Будем считать начальной следующую конфигурацию: $\Lambda q_1 \sigma_1 \dots \sigma_r \Lambda$. Для того, чтобы прибавить 1 к двоичному числу n сначала необходимо "отогнуть" головку машины вправо и установить ее под последней (самой младшей) цифрой двоичного числа. Если последняя цифра числа есть 0, то достаточно заменить 0 на 1 и завершить процесс, то есть перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 .

Если же последняя цифра числа есть 1, то необходимо заменить ее на 0, а головку сдвинуть влево, чтобы "увидеть" следующий разряд двоичного числа. Если окажется, что этот разряд содержит 0, то заменить 0 на 1 и опять-таки перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 . Если же этот разряд содержит 1, необходимо заменить ее на 0 и опять сдвинуть головку влево. И так далее, до тех пор, пока либо не встретится разряд, содержащий 0, либо головка дойдет до первого слева пустого символа Λ . В любом из этих случаев 0 или Λ следует заменить на 1 и перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 .

Программа машины, прибавляющей 1 к двоичному числу, имеет вид:

$q_1 1 \rightarrow q_1 1 R$	$q_2 \Lambda \rightarrow q_0 1 H$
$q_1 0 \rightarrow q_1 0 R$	$q_3 1 \rightarrow q_3 1 L$
$q_1 \Lambda \rightarrow q_2 \Lambda L$	$q_3 0 \rightarrow q_3 0 L$
$q_2 0 \rightarrow q_3 1 H$	$q_3 \Lambda \rightarrow q_0 \Lambda R$
$q_2 1 \rightarrow q_2 0 L$	

2. Пусть требуется перевести запись натурального числа n , изображенного в виде последовательности n "палочек" ($|$) $n \geq 1$, в двоичную запись в алфавите $\{0,1\}$. Т.е. конфигурация $\Lambda q_1|/|/|.../\Lambda$ должна быть преобразована в $\Lambda q_0\sigma_1\sigma_2...\sigma_p \Lambda$, где $\sigma_1\sigma_2...\sigma_p$ - двоичная запись n .

Решение: в качестве внешнего алфавита машины берем алфавит: $\{\Lambda, |, 0, 1\}$.

Опишем алгоритм решения задачи в словесной форме:

1. "Отогнуть" головку машины влево до первого пустого символа, заменить этот символ нулем (0).
2. "Отогнуть" головку машины вправо до последней черточки, заменить ее пустым символом. Запомнить, что 1 из унарного представления числа n вычтена.
3. Установить головку под младшим разрядом формируемого двоичного числа и прибавить к двоичному числу 1 (так как мы делали это при построении предыдущей машины). Запомнить, что 1 к двоичному числу прибавлена.
4. Пункты 2 и 3 повторять до тех пор, пока не исчерпается исходное число, то есть на ленте не останется "палочек".
5. Головку отогнуть в крайнюю левую позицию полученного двоичного числа и остановить машину.

Программа работы машины имеет вид:

$q_1 \rightarrow q_1 L$	$q_4\Lambda \rightarrow q_51R$
$q_1\Lambda \rightarrow q_20R$	$q_51 \rightarrow q_51R$
$q_2 \rightarrow q_2 R$	$q_50 \rightarrow q_50R$
$q_2\Lambda \rightarrow q_3\Lambda L$	$q_5 \rightarrow q_2H$
$q_3 \rightarrow q_4\Lambda L$	$q_5\Lambda \rightarrow q_6$
$q_4 \rightarrow q_4 L$	ΛL
$q_40 \rightarrow q_51R$	$q_61 \rightarrow q_61L$
$q_41 \rightarrow q_40L$	$q_60 \rightarrow q_60L$
	$q_6\Lambda \rightarrow q_0\Lambda R$

3. Составьте программу машины Тьюринга, подсчитывающую число вхождений символа a в слово P в алфавите $\{a, b, c\}$.

Решение: пусть начальная конфигурация машины имеет вид q_1P .

Надо перевести ее в конфигурацию $q_0 n^* P$, где n – двоичное число, выражающее число вхождений символа a в слово P в алфавите $\{a, b, c\}$.

Внешний алфавит машины: $A = \{a, b, c, a', 0, 1, *, \Lambda\}$.

Внутренний алфавит машины: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$.

Опишем алгоритм решения задачи в словесной форме:

1. Слева от слова P приписываем символы 0 и $*$.
2. Находим в слове P вхождение символа a , заменяем его на a' , запоминаем, перемещаем головку влево, прибавляем 1 к двоичному числу n («счетчику»).
3. Повторяем п. 2 до тех пор, пока не пройдем все слово P .
4. Убираем все штрихи в слове P .
5. Устанавливаем головку машины под крайней левой цифрой двоичного числа n и останавливаем машину.

Программа работы машины имеет вид:

$q_1 a \rightarrow q_2 aL$	$q_4 * \rightarrow q_5 *R$	$q_6 a' \rightarrow q_6 a'L$	$q_7 b \rightarrow q_7 bL$
$q_1 b \rightarrow q_2 bL$	$q_5 b \rightarrow q_5 bR$	$q_6 * \rightarrow q_6 *L$	$q_7 c \rightarrow q_7 cL$
$q_1 c \rightarrow q_2 cL$	$q_5 c \rightarrow q_5 cR$	$q_6 0 \rightarrow q_4 1R$	$q_7 a' \rightarrow q_7 aL$
$q_2 \Lambda \rightarrow q_3 *L$	$q_5 a' \rightarrow q_5 a'R$	$q_6 1 \rightarrow q_6 0L$	$q_7 * \rightarrow q_7 *L$
$q_3 \Lambda \rightarrow q_4 0R$	$q_5 a \rightarrow q_6 a'H$	$q_6 \Lambda \rightarrow q_4 1L$	$q_7 0 \rightarrow q_7 0L$
$q_4 0 \rightarrow q_4 0R$	$q_6 b \rightarrow q_6 bL$	$q_5 \Lambda \rightarrow q_7 \Lambda L$	$q_7 1 \rightarrow q_7 1L$
$q_4 1 \rightarrow q_4 1R$	$q_6 c \rightarrow q_6 cL$	$q_7 a \rightarrow q_7 aL$	$q_7 \Lambda \rightarrow q_0 \Lambda R$

Задание 3.

Постройте машину Тьюринга,

- 0) находящую и выделяющую (например, «*») первое вхождение слова \log в произвольное слово P в алфавите $\{l, o, g\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 1) переводящую слово F в алфавите $\{a, b, c\}$ в его «зеркальное отражение» $F\sim$. Начальная конфигурация: $q_1 F$, заключительная конфигурация: $q_0 F\sim$. (Например, слово $abbca$ эта машина должна переводить в слово $acbb a$, слово $baba$ - в слово $abab$ и т.д.);

- 2) находящую и выделяющую (например, «?») первое вхождение слова dec в произвольное слово G в алфавите $\{d, e, c\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 3) строящую инверсию двоичного кода $\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, заключительная конфигурация: $q_0\alpha'_1\alpha'_2...\alpha'_n$, где $\alpha'_i=1$, если $\alpha_i=0$ и $\alpha'_i=0$, если $\alpha_i=1$;
- 4) находящую и выделяющую (например, «%») первое вхождение слова int в произвольное слово W в алфавите $\{i, n, t\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 5) проверяющую справедливость неравенства $n > m$, где n и m - двоичные числа. В зависимости от справедливости неравенства, машина слева от него пишет на ленте "ДА" или "НЕТ". Начальная конфигурация: $q_1\beta_1\beta_2...\beta_s > \psi_1\psi_2...\psi_t$, заключительная: $q_0P\beta_1\beta_2...\beta_s > \psi_1\psi^2...\psi_t$, где $\psi_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $P \in \{\text{ДА}, \text{НЕТ}\}$;
- 6) находящую и выделяющую (например, «#») первое вхождение слова abs в произвольное слово V в алфавите $\{a, b, s\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 7) проверяющую справедливость неравенства $n < m$, где n и m - двоичные числа. В зависимости от справедливости неравенства, машина слева от него пишет на ленте "ДА" или "НЕТ". Начальная конфигурация: $q_1\beta_1\beta_2...\beta_s < \psi_1\psi_2...\psi_t$, заключительная: $q_0P\beta_1\beta_2...\beta_s < \psi_1\psi^2...\psi_t$, где $\psi_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $P \in \{\text{ДА}, \text{НЕТ}\}$;
- 8) находящую и выделяющую (например, «\$») первое вхождение слова sqg в произвольное слово Q в алфавите $\{s, q, g\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 9) переводящую слово H в алфавите $\{e, x, p\}$ в его «зеркальное отражение» $H\sim$. Начальная конфигурация: q_1H , заключительная конфигурация: $q_0H\sim$. (Например, слово $eexxr$ эта машина должна переводить в слово $pxxee$).

Рекомендуемая литература

1. Ершов Д.Л., Палютин Е.А. "Математическая логика", М, Наука, 1987г.
2. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: «Вышэйш. школа», 1977
3. Клини С. Математическая логика. - М.: Мир, 1980.
4. Колесников Н.Г. Математические и логические основы информатики. Краснодар: КубГАУ, 2000
5. Колмогоров А.Н. Математика / В кн. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. - М.: Наука, 1991. - С.
6. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. - М.: Изд-во МГУ, 1982.
7. Кук Д., Бейз Г. "Компьютерная математика", М, Наука, 1990г.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970
9. Лихтарников Л.М, Сукачева Т.Г. Математическая логика. - СПб: Изд-во «Лань», 1998
10. Столяр А.А. Элементарное введение в математическую логику - М.: Изд-во «Просвещение», 1965